MAGICKÉ ŠTVORCE AKO PREDMET MATEMATICKÉHO SKÚMANIA

Ingrid Semanišinová
Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ Košice
Marián Trenkler
Katedra matematiky a fyziky, Pedagogická fakulta KU Ružomberok

Abstakt: *Článok uvádza možnosti využitia magických štvorcov vo vyučovaní matematiky na strednej škole. Úlohy uvedené v článku sú otvorené, nepodsúvajú žiakovi smer ani metódu riešenia. Ich vyriešenie nevyžaduje špecifické vstupné vedomosti, ale vyžaduje sa uplatnenie vyšších poznávacích funkcií*

Kľúčové slová: magický štvorec, latinský štvorec, vyučovanie matematických dôkazov.

ÚVOD

S úlohami o magických štvorcoch, prípadne iných magických útvaroch sa môžeme stretnúť v učebniciach matematiky už od 1. ročníka základnej školy, v literatúre popularizujúcej matematiku aj v rôznych časopisoch na voľné chvíle. Vo väčšine prípadov ide o úlohy typu „doplňte čísla do tabuľky tak, aby čísla v tabuľke spĺňali dané pravidlá". Náročnosť takýchto úloh je tým vyššia, čím sú pravidlá komplikovanejšie a menej jednoznačné. V takom prípade riešiteľ úlohy nevystačí len so znalosťou numerických operácií, ale je potrebné, aby systematicky preskúmal viacero možností a nesprávne postupne vylúčil.

V tomto článku ukážeme ďalšie možnosti využitia magických štvorcov vo vyučovaní matematiky, konkrétne pri realizácii skúmania na hodinách matematiky, ktoré by podľa nášho názoru malo predchádzať vyučovaniu matematických dôkazov. Keďže skúmanie je tvorivá činnosť, úlohy formulované v článku sú otvorené a nepodsúvajú žiakovi smer ani metódu riešenia, napríklad namiesto úlohy „Dokážte, že existuje jediný magický štvorec 3 x 3." žiakom zadávame úlohu „Koľko je všetkých magických štvorcov 3 x 3?"

Skúmanie, ktoré v článku prezentujeme má dve časti, prvá časť je o magických štvorcoch a druhá časť je o latinských štvorcoch a ich vzťahu k magickým štvorcom. Každá časť začína úlohou, ktorá smeruje k definícii pojmu. Cieľom ďalších úloh je vyslovovanie hypotéz o vlastnostiach definovaného pojmu, dokazovanie hypotéz a následná formulácia tvrdení. Vyriešenie väčšiny úloh nevyžaduje špecifické vstupné vedomosti (často vystačíme zo základnými poznatkami z aritmetiky), ale vyžaduje sa uplatnenie vyšších poznávacích funkcií (induktívne a deduktívne myslenie). Skúmanie je určené pre žiakov stredných škôl. Realizácia každej jeho časti vyžaduje 2 až 3 vyučovacie hodiny.

MAGICKÉ ŠTVORCE*

Úloha 1. Doplňte čísla do chýbajúcich políčok na obrázku 1. Uveďte na základe čoho ste sa rozhodli.

---

*__Definícia.__ *Magický štvorec rádu n* je štvorcová tabuľka obsahujúca všetky čísla od 1 po n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký. Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva *magické číslo*.

	2	3	
5	11	10	8
9	7	6	12
	14	15	

	16	9	22	
20		21		2
7	25	13	1	19
24		5		6
	4	17	10	

	29	2	4	13	
9		20	22		18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28		15	17		19
	24	33	35	8	

Obrázok 1: Doplňte čísla do chýbajúcich políčok

Komentár: Navrhujeme rozdeliť riešenie úlohy do troch častí:

1. Samostatné riešenie úlohy.
2. Spoločná diskusia o riešeniach. Žiaci prezentujú a odôvodňujú svoje riešenia.
3. Výber najkrajšieho, najlepšie odôvodneného, najatraktívnejšieho riešenia.

Väčšina žiakov si v procese riešenia úlohy všimne, že v tabuľkách sú zhodné súčty vo vyplnených stĺpcoch a riadkoch, len zriedkavo kontrolujú aj súčty na diagonálach. Niekedy žiaci pri dopĺňaní do prvej štvorcovej tabuľky dopĺňajú čísla na základe parity alebo nájdu iné pravidlo, ale pri dopĺňaní čísel do druhej tabuľky poopravia svoje riešenie tak, aby dosiahli rovnaké súčty. Viacerí žiaci v súvislosti s riešením úlohy spomínajú pojem magický štvorec.

Po vyriešení úlohy navrhujeme žiakov oboznámiť s históriou magických štvorcov*. Definíciu pojmu magický štvorec zatiaľ nevyslovujeme.

Úloha 2. Zostrojte magický štvorec 3 x 3.

Komentár: Podobne ako pri prvej úlohe aj teraz navrhujeme riešenie rozdeliť do troch častí. Keďže žiaci nemajú dosiaľ definovaný pojem magický štvorec môžu sa objaviť riešenia, v ktorých zhodné súčty budú len v riadkoch a v stĺpcoch a nie na diagonálach, prípadne do políčok tabuľky nebudú vpísané čísla od 1 do 9, ale iné. Počas diskusie o tom, ktorý magický štvorec je „najkrajší", si žiaci zvyčajne vyberajú magické štvorce s číslom 5 v strede tabuľky. Najčastejšie odôvodnenia sú: „je tam najviac rovnakých súčtov", prípadne „prostredné číslo z čísel od 1 do 9 je v strede tabuľky".

Po vyriešení 2. úlohy sformulujeme so žiakmi definíciu magického štvorca.

Úloha 3. Zostrojte magický štvorec rádu 2.

Komentár: Úlohu žiakom zadávame predovšetkým kvôli poznaniu, že odpoveď „úloha nemá riešenie" je také isté riešenie ako každé iné.

Úloha 4. Koľko je všetkých magických štvorcov rádu 3?

Komentár: Žiaci zvyčajne nájdu niekoľko riešení s číslom 5 v strede počas riešenia druhej úlohy. Viacerí si všimnú, že získané riešenia sú rovnaké („ak tú tabuľku otočíme, resp. preklopíme, dostaneme takú istú tabuľku ako už na tabuli máme"- myšlienka symetrie štvorca). Na rozdiel od 2. úlohy, pri riešení tejto už žiaci nevystačia s metódou pokusov a omylov, ale musia hľadať logické argumenty pre svoje tvrdenie: „Ja už mám všetky!". Tieto argumenty môžu byť zo začiatku nepresné napr. „číslo 5 musí byť v strede, lebo inak by to nevyšlo" alebo „číslo 9 nemôže byť v rohovom políčku, lebo potom v jednom smere nemám, čo doplniť". Počas vzájomnej diskusie sú žiaci nútení argumentovať presnejšie, aby ich argumenty ostatní žiaci aj učiteľ akceptovali. Niektorí žiaci počas riešenia objavia vzťah pre

* Bližšie informácie o histórii magických štvorcov nájde čitateľ v publikácii [2] a [4] a na www stránkach [6], [7] a [8].

magické číslo magického štvorca rádu 3. Spoločne so žiakmi potom môžeme dospieť napríklad k takémuto riešeniu:

Vieme, že súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach má byť rovnaký. Súčet všetkých čísel od 1 po 9 je 45. Ak má byť v každom riadku rovnaký súčet, tak magické číslo magického štvorca rádu 3 je 45 : 3 = 15.

Číslo 15 ako súčet troch čísel od 1 do 9 môžeme dostať takto:

1+9+5	2+9+4	3+8+4	4+6+5
1+8+6	2+8+5	3+7+5	
	2+7+6		

V týchto súčtoch sa čísla 2, 4, 6, 8 vyskytujú trikrát, čísla 1, 3, 7, 9 – dvakrát a číslo 5 - štyrikrát.

Ak si pozorne prezrieme prázdnu tabuľku 3 x 3, tak zistíme, že číslo, ktoré bude zapísané v rohu tabuľky sa bude v súčtoch vyskytovať 3 krát (súčet v riadku, v stĺpci a na diagonále), číslo, ktoré bude zapísané v strede tabuľky sa bude v súčtoch vyskytovať 4 krát a ostatné čísla budú v súčtoch práve 2 krát.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že číslo 5 musí byť v strede tabuľky a čísla 2, 4, 6, 8 v rohoch tabuľky. Dostávame osem možností (obrázok 2). V skutočnosti ide o jeden magický štvorec, zvyšných 7 dostaneme z prvého, ak použijeme symetrie štvorca.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Obrázok 2: Magický štvorec rádu 3

Úloha 5. Môžu mať dva rôzne magické štvorce rovnakého rádu rôzne magické čísla?

Komentár: Prvá reakcia žiakov je zvyčajne: „Samozrejme, môžu.“ Táto reakcia je dosť prekvapujúca, pretože pri riešení 4. úlohy niektorí žiaci objavili vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3, ktoré nezávisí od usporiadania čísel v magickom štvorci. Aby sme žiakov motivovali k formulácii správnej hypotézy predložíme im niekoľko rôznych magických štvorcov rádu 4 (vhodné sú historicky známe magické štvorce rádu 4[*]) a vyzveme ich, aby pre každý z nich zistili magické číslo. Zistenie, že viaceré rôzne magické štvorce rádu 4 majú rovnaké magické číslo vnesie pochybnosti medzi žiakov a objaví sa hypotéza:

---

[*] **Diabolský magický štvorec**

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Bol objavený v Indii okolo roku 1000.

Dűrerov magický štvorec.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

V roku 1514 vytvoril známy nemecký maliar ***Albrecht Dűrer*** slávny drevoryt "**Melencolia I**", na ktorom nájdeme magický štvorec rádu 4.

„Všetky magické štvorce toho istého rádu majú rovnaké magické číslo." Zvyčajne ju ako prví sformulujú žiaci, ktorí už pri riešení 4. úlohy objavili vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3.

Stretli sme sa s dvoma spôsobmi odôvodnenia hypotézy:

1. spôsob: Keby dva rôzne magické štvorce toho istého rádu (označme ich rád n) mali rôzne magické čísla m_1 a m_2, tak by to znamenalo, že v prvom magickom štvorci je súčet čísel v každom riadku m_1 a v druhom magickom štvorci je súčet čísel v každom riadku m_2. Potom v prvom magickom štvorci je súčet všetkých čísel zapísaných do magického štvorca $1+2+\cdots+(n^2-1)+n^2=n\cdot m_1$ a v druhom magickom štvorci je súčet všetkých čísel zapísaných do magického štvorca $1+2+\cdots+(n^2-1)+n^2=n\cdot m_2$. A teda $n\cdot m_1=n\cdot m_2$. Z toho vyplýva, že $m_1=m_2$ a teda, že magické čísla obidvoch magických štvorcov sú rovnaké.
2. spôsob: Ak spočítame všetky čísla zapísané do magického štvorca rádu n dostaneme číslo $1+2+\cdots+(n^2-1)+n^2=\frac{n^2}{2}(n^2+1)$. Keďže v každom riadku resp. stĺpci má byť súčet čísel rovnaký a riadkov resp. stĺpcov je n dostaneme výsledok $\frac{n}{2}(n^2+1)$, čo je magické číslo štvorca rádu n.

Za priaznivých okolností môžeme teda úlohu využiť na propedeutiku dôkazových metód. Navrhujeme, aby učiteľ žiakom pomohol s formálnym zápisom dôkazu na tabuľu.

LATINSKÉ A MAGICKÉ ŠTVORCE

Úloha 6. Je možné uložiť na stôl 9 tanierikov (3 modré, 3 žlté a 3 červené) a na tanieriky 9 šálok (3 modré, 3 žlté a 3 červené) do troch radov a troch stĺpcov tak, aby:

1. v každom rade a v každom stĺpci boli tanieriky rôznych farieb,
2. v každom rade a v každom stĺpci boli šálky rôznych farieb,
3. rovnaká farebná kombinácia tanierik, šálka sa nezopakovala (t.j. ak je raz modrá šálka na červenom tanieriku, tak už na stole nemôže byť modrá šálka na červenom tanieriku, ale môžeme naň položiť červenú alebo žltú šálku)?

Komentár: U žiakov sa objavujú rôzne spôsoby zápisu riešenia úlohy. Niektorí žiaci používajú farbičky, iný používajú abstraktnejší zápis (pozri obrázok 3).

a)

mš mt	žš čt	čš žt
žš žt	čš mt	mš čt
čš čt	mš žt	žš mt

mš – modrá šálka
žš – žltá šálka
čš – červená šálka
mt – modrý tanierik
žt – žltý tanierik
čt – červený tanierik

b)

ž č	m m	č ž
č m	ž ž	m č
m ž	č č	ž m

v políčku sú hore šálky a dole tanieriky

c)

čč	žž	mm
mž	čm	žč
žm	mč	čž

Obrázok 3: Žiacke označenie

Ak žiadny žiak nepoužije číselné označenie pri riešení úlohy učiteľ môže žiakom prezentovať ďalšiu formu zápisu riešenia 6. úlohy (pozri obrázok 4). Žiakov vyzveme, aby svoje riešenia 6. úlohy zapísali pomocou čísel.

0 – modrá
1 – žltá
2 – červená

2, 2	0, 1	1, 0
0, 0	1, 2	2, 1
1, 1	2, 0	0, 2

Obrázok 4: Číselné označenie

Úloha 7. Uložte na stôl 25 (16) tanierikov a 25 (16) šálok (tanieriky a šálky sú zafarbené 5(4) farbami označenými 0,...,4 (0,...,3)) - do piatich (štyroch) radov a piatich (štyroch) stĺpcov tak, aby:

1. v každom rade a v každom stĺpci boli tanieriky rôznych farieb,
2. v každom rade a v každom stĺpci boli šálky rôznych farieb,
3. rovnaká dvojica tanierik, šálka sa nezopakovala (t.j. ak je raz modrá šálka na červenom tanieriku, tak druhý krát už na stole nemôže byť na červenom tanieriku opäť modrá šálka, ale môžeme naň položiť červenú alebo žltú šálku).

Komentár: Úlohu s 25 šálkami a tanierikmi žiaci zvyčajne vyriešia veľmi rýchlo. Objavia pri tom, že môžu využiť symetriu štvorca (najčastejšie je to preklopenie okolo horizontálnej, resp. vertikálnej osi tabuľky). Pre žiakov je prekvapujúce, že pre 16 tanierikov a šálok sa nedá použiť rovnaký postup ako predtým a nájsť riešenie je pomerne zdĺhavé (zvyčajne trvá viac ako 15 minút).

Po vyriešení úlohy je vhodné žiakom porozprávať niečo z histórie úloh, ktorými sa zaoberali (pozri tiež [1] a [3]).*

Úloha 8. Tabuľku, ktorú ste dostali pri riešení 6. úlohy rozdeľte na dve tabuľky. Jedna tabuľka bude pre šálky a druhá pre tanieriky. To isté urobte s tabuľkami, ktoré ste dostali pri riešení 7. úlohy. Skúmajte spoločné vlastnosti vzniknutých tabuliek. Majú nejakú vlastnosť spoločnú s magickými štvorcami?

Komentár: Úloha je pre žiakov ľahká a smeruje k zavedeniu pojmu latinský štvorec. Žiaci si môžu všimnúť nasledujúce vlastnosti: v tabuľke sú čísla 0, 1, ..., $n - 1$, každé číslo ja tam n -krát, v každom riadku a v každom stĺpci sú navzájom rôzne čísla, súčet čísel v riadkoch a v stĺpcoch je rovnaký, súčet čísel v riadkoch a v stĺpcoch je rovný $n(n - 1)/2$.

Po diskusii o vlastnostiach vzniknutých tabuliek zavedieme pojem latinský štvorec**. Následne zavedieme operácie s latinskými štvorcami:

- pripočítanie konštanty a – každý prvok x latinského štvorca nahradíme číslom $x+a$,

* Tabuľkami, ktoré sú vytvárané v 6. a 7. úlohe sa ako prvý zaoberal L. Euler.
Euler riešil takúto úlohu s 36 dôstojníkmi (1779): Na vojenskú slávnosť má nastúpiť 36 dôstojníkov povyberaných zo šiestich plukov a to tak, aby z každého pluku bol vybraný plukovník, podplukovník, major, nadporučík, poručík a podporučík. Dôstojníci mali pri nástupe utvoriť štvorec zložený zo šiestich radov po šiestich dôstojníkoch a to tak, aby v každom rade a zástupe bol jeden dôstojník z každého pluku i z každej hodnosti. Nakreslite ako vyzeral štvorec, ktorý vytvorili pri nástupe.
Skúste Eulerovu úlohu vyriešiť najprv s 25 dôstojníkmi povyberanými z piatich plukov tak, aby z každého pluku bol vybraný plukovník, podplukovník, major, nadporučík, poručík. Dôstojníci mali pri nástupe utvoriť štvorec zložený z piatich radov po piatich dôstojníkoch a to tak, aby v každom rade a zástupe bol jeden dôstojník z každého pluku i z každej hodnosti. Pripomína Vám táto úloha niečo? Skúste teraz vyriešiť pôvodnú Eulerovu úlohu.
Euler predpokladal, že jeho úloha sa nedá vyriešiť, ak počet dôstojníkov je n^2, kde $n = 4k + 2$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$. Až v roku 1959 bolo dokázané, že úloha nemá riešenie pre $k = 0, 1$ ale pre $k > 1$, sa úloha vyriešiť dá.

** **Latinským štvorcom** rádu n nazývame štvorcovú tabuľku, ktorá má n riadkov a n stĺpcov. Do jednotlivých políčok tabuľky sú vpísané čísla z množiny $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, pričom platí, že v každom riadku aj stĺpci sú navzájom rôzne čísla.

pozri obrázok 5.

$$5 + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 7 & 6 \\ \hline 7 & 6 & 5 \\ \hline 6 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Obrázok 5: Pripočítanie konštanty

- vynásobenie konštantou a – každý prvok x latinského štvorca nahradíme číslom $x * a$, pozri obrázok 6.

$$4 \ \mathrm{x} \ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 8 & 12 \\ \hline 8 & 12 & 0 & 4 \\ \hline 12 & 8 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 12 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Obrázok 6: Vynásobenie konštantou

- sčítanie dvoch latinských štvorcov (alebo štvorcových tabuliek, ktoré vznikli z latinských štvorcov pomocou vyššie uvedených operácií) rovnakého rádu – sčítame prvky v prislúchajúcich si políčkach, pozri obrázok 7.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 4 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 6 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Obrázok 7: Sčítanie dvoch štvorcových tabuliek

Úloha 9. Zoberte si dvojicu štvorcových tabuliek, ktorú ste dostali pri riešení 8. úlohy. Kombinujte vyššie uvedené operácie (pozri príklad na obrázku 8) a skúmajte vlastnosti takto vytvorených štvorcových tabuliek. Čo viete povedať o súčte čísel v riadkoch a stĺpcoch vzniknutých tabuliek?

$$2 + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} + 4 \ \mathrm{x} \ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Obrázok 8: Kombinovanie operácií

Komentár: Žiaci si obvykle veľmi rýchlo všimnú, že pri použití operácie „pripočítanie konštanty" a „vynásobenie konštantou" je súčet v riadkoch a v stĺpcoch konštantný. Pri operácii „sčítanie dvoch latinských štvorcov" a pri kombinácii tejto operácie s predchádzajúcimi si už nie sú istí. Môžeme ich vyzvať, aby našli kontrapríklad. Po istom čase zvyčajne väčšina pripustí hypotézu, že súčet v riadkoch a stĺpcoch bude rovnaký vždy. Niektorí žiaci odôvodnenie „vidia", nevedia ho však prezentovať. Odôvodnenie jedného zo žiakov vyzeralo nasledovne: „Ak k štvorcovej tabuľke pripočítame konštantu alebo ak ju vynásobíme konštantou, tak dostaneme štvorcovú tabuľku, v ktorej je súčet v riadkoch a stĺpcoch rovnaký Ak potom sčítame dve tabuľky, pričom v prvej tabuľke bol súčet v riadku číslo a a v druhej bol súčet v riadku číslo b, tak vo výslednej tabuľke bude súčet v riadku číslo $a + b$. To isté platí pre súčet v stĺpcoch"

Úloha 10. Kombinujte operácie s dvojicou latinských štvorcov rádu 3 (ako v úlohe 9) tak, aby ste vytvorili štvorcové tabuľky, pre ktoré platí:

a) najväčšie číslo v tabuľke je 9,

b) všetky čísla sú navzájom rôzne,

c) všetky čísla sú navzájom rôzne a najväčšie číslo v tabuľke je 9.

Komentár: Časť a) zvyčajne nerobí žiakom nijaké problémy, pričom sa môže objaviť viacero riešení. Časť b) je náročnejšia. Viackrát sa pri jej riešení objavilo tvrdenie: „Jeden štvorec treba vynásobiť dosť veľkým číslom, aby to vyšlo.“ Na otázku, aké je to dosť veľké číslo uviedol žiak: „ napríklad číslom 100“. Po otázke, či by to nemohlo byť aj číslo menšie ako 100 sa pomerne rýchlo objavilo riešenie s číslom 5 a potom s číslom 3 a odôvodnenie, že pre dvojku to už nevyjde, lebo napríklad $2 \cdot 2 + 0 = 2 \cdot 1 + 2$ a teda v tabuľke nedostaneme rôzne čísla (riešenia sú na obrázku 9).

		0	1	2		0	2	1		0	102	201
100	*	1	2	0	+	1	0	2	=	101	200	2
		2	0	1		2	1	0		202	1	100

		0	1	2		0	2	1		0	7	11
5	*	1	2	0	+	1	0	2	=	6	10	2
		2	0	1		2	1	0		12	1	5

		0	1	2		0	2	1		0	5	7
3	*	1	2	0	+	1	0	2	=	4	6	2
		2	0	1		2	1	0		8	1	3

Obrázok 9: Žiacke riešenia úlohy 10b)

Riešenie časti c) je po vyriešení časti b) jednoduché.

Úloha 11. Podarí sa vám operáciami ako v úlohe 10 zostrojiť magický štvorec? Čo musí platiť pre dvojicu latinských štvorcov, aby to bolo možné?

Komentár: Riešenie úlohy má žiakov nasmerovať k vysloveniu tvrdenia: Ak chceme dostať magický štvorec, tak pre dvojicu latinských štvorcov musí platiť, že súčet čísel na diagonálach je rovný súčtu čísel v riadku, resp. v stĺpci (pre latinský štvorec rádu 3 je to číslo 3, pre latinský štvorec rádu n je to číslo $0 + 1 + 2 + ... + n - 1 = n(n - 1)/2$). Žiak, ktorý má takúto dvojicu latinských štvorcov ako výsledok riešenia 6. úlohy dostane magický štvorec už pri riešení úlohy 10.

Úloha 12. Uvažujte dvojicu latinských štvorcov rádu 4 (5), ktorú ste dostali pri riešení 8. úlohy. Kombinujte operácie s touto dvojicou tak, aby ste vytvorili štvorcové tabuľky, pre ktoré platí:

a) najväčšie číslo v tabuľke 4 x 4 (5 x 5) je 16 (25),

b) všetky čísla sú navzájom rôzne,

c) všetky čísla sú navzájom rôzne a najväčšie číslo v tabuľke 4 x 4 (5 x 5) je 16 (25).

d) je to magický štvorec 4 x 4 (5 x 5)

Komentár: Túto úlohu riešia žiaci samostatne. Riešenie úlohy 12d) je nasledovné:

$$4 \; * \; \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \; + \; \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \; + \; 1 \; = \; \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 8 & 10 & 15 \\ \hline 11 & 14 & 4 & 5 \\ \hline 16 & 9 & 7 & 2 \\ \hline 6 & 3 & 13 & 12 \\ \hline \end{array}$$

ZÁVER

Pri vyučovaní dôkazov na hodinách matematiky sme často svedkami toho, že oveľa viac sa kladie dôraz na formálnu správnosť a úplnosť dôkazu ako na porozumenie podstaty dôkazu. To spôsobuje, že sa v skutočnosti nevyužíva vzdelávacia hodnota dôkazu a zmysluplné učenie sa matematike sa mení na bezvýznamné, formálne cvičenie, ktoré vyrába žiak pre učiteľa a nie preto, aby sa presvedčil, že jeho hypotéza naozaj platí. Zvyčajne totiž ani žiadna hypotéza neexistuje. Žiakom sa rovno predkladá úloha typu „ Dokážte, že ... .“ Takto formulované úlohy však potláčajú tvorivosť žiakov a nenútia ich zamýšľať sa nad tým, odkiaľ sa vzalo tvrdenie, ktoré majú dokázať. Myslíme si, že v článku formulované úlohy môžu byť úspešne využité pri propedeutike vyučovania matematických dôkazov. Pri formulovaní jednotlivých úloh sme pritom mali na zreteli, že dôkaz je iba jeden z krokov v procese učenia sa a objavovania nových matematických poznatkov. Matematik najprv formuluje hypotézy, ktoré sú založené na pozorovaniach, potom hypotézu testuje a nakoniec pracuje na tom, aby hypotézu dokázal. Potom by malo nasledovať posúdenie „dôkazu“ ostatnými matematikmi (v našom prípade žiakmi triedy, prípadne učiteľom) a až nakoniec akceptovanie hypotézy ako pravdivého tvrdenia.

LITERATÚRA

[1] Bosák, J. : *Latinské štvorce*. ŠMM, Praha 1976

[2] Karpenko, V. : *Tajemství magických čtverců*. Půdorys, Praha 1997

[3] Semanišinová, I.: *Objavovanie čara magických štvorcov*. Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok 4 (2002), s. 86-92.

[4] Semanišinová, I. ; Trenkler, M.: *O nadprirodzenej korytnačke, magických štvorcoch a kockách*. Obzory matematiky, fyziky a informatiky 4/2000(29), s. 21-34

[5] Trenkler, M.: *Magické štvorce a kocky – zdroj námetov na vyučovanie matematiky*. Zborník z konferencie „Matematika v škole dnes a zajtra“, Katolícka univerzita v Ružomberku 2002, roč. II, č.1, s. 88-94.

[6] http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html

[7] http://www.grogono.com/magic/history.php

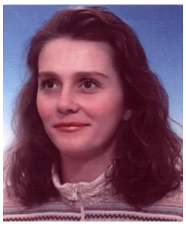
[8] http://illuminations.nctm.org/index_d.aspx?id=263

Adresy autorov:

RNDr. Ingrid Semanišinová
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
email: isemanis@science.upjs.sk

Doc. RNDr. Marián Trenkler, CSc.
Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
email: trenkler@fedu.ku.sk

Ingrid Semanišinová (1969) je absolventkou PF UPJŠ v Košiciach, odbor učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov, aprobácia: matematika – informatika). Od roku 1993 pôsobí na Oddelení didaktiky matematiky Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Od roku 2000 je externou doktorandkou na Ústave matematických vied PF UPJŠ v Košiciach v odbore Teória vyučovania matematiky.



Marián Trenkler (1948) je absolventom PF UPJŠ v Košiciach, odbor matematika. ...